解答

作成者：吾妻広夫

1. 次の公式を使う。
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \tag{1}$$
よって、以下が得られる。
$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 \\ &= E_{01}\sin(\omega t + \alpha_1) + E_{02}\sin(\omega t + \alpha_2) \\ &= E_{01}(\sin\omega t\cos\alpha_1 + \cos\omega t\sin\alpha_1) + E_{02}(\sin\omega t\cos\alpha_2 + \cos\omega t\sin\alpha_2) \\ &= (E_{01}\cos\alpha_1 + E_{02}\cos\alpha_2)\sin\omega t + (E_{01}\sin\alpha_1 + E_{02}\sin\alpha_2)\cos\omega t \end{aligned} \tag{2}$$

2. 以下で、E_0、α を定義した。
$$E_0\cos\alpha = E_{01}\cos\alpha_1 + E_{02}\cos\alpha_2, \tag{3}$$
$$E_0\sin\alpha = E_{01}\sin\alpha_1 + E_{02}\sin\alpha_2 \tag{4}$$
式 (3)、(4) について、両辺を二乗して足し合わせる。左辺は次の形になる。
$$(E_0\cos\alpha)^2 + (E_0\sin\alpha)^2 = E_0^2 \tag{5}$$
ただし、上式では次の公式を使った。
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \tag{6}$$
右辺は次の形になる。
$$\begin{aligned} & (E_{01}\cos\alpha_1 + E_{02}\cos\alpha_2)^2 + (E_{01}\sin\alpha_1 + E_{02}\sin\alpha_2)^2 \\ = & (E_{01}\cos\alpha_1)^2 + (E_{02}\cos\alpha_2)^2 + 2E_{01}\cos\alpha_1 E_{02}\cos\alpha_2 \\ & +(E_{01}\sin\alpha_1)^2 + (E_{02}\sin\alpha_2)^2 + 2E_{01}\sin\alpha_1 E_{02}\sin\alpha_2 \\ = & E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2) \\ = & E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos(\alpha_2 - \alpha 1) \end{aligned} \tag{7}$$
ただし、上では次の公式を用いた。
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y \tag{8}$$
よって、以下を得る。
$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos(\alpha_2 - \alpha 1) \tag{9}$$
また、式 (4) を式 (3) で割ると、$\tan x = \sin x/\cos x$ より以下を得る。
$$\tan\alpha = \frac{E_{01}\sin\alpha_1 + E_{02}\sin\alpha_2}{E_{01}\cos\alpha_1 + E_{02}\cos\alpha_2} \tag{10}$$

3. 上の二つの結果から、以下を得る。
$$\begin{aligned} E &= E_0\cos\alpha\sin\omega t + E_0\sin\alpha\cos\omega t \\ &= E_0\sin(\omega t + \alpha) \end{aligned} \tag{11}$$
ただし、上式の導出で式 (1) を使った。