解答

作成者：吾妻広夫

1. 以下の式が与えられている。
$$\dot{n} = GnN - kn \tag{1}$$
$$N = N_0 - \alpha n \tag{2}$$
式 (1) に式 (2) を代入すれば良い。こうして、以下が得られる。
$$\dot{n} = (GN_0 - k)n - (\alpha G)n^2 \tag{3}$$

2. $N_0 < k/G$ のとき、$GN_0 - k < 0$ となる。従って、式 (3) により、$\dot{n}$ は以下の関数 $f(n)$ で表される。
$$\begin{aligned} f(n) &= -an^2 - bn \\ &= -an(n + \frac{b}{a}) \end{aligned} \tag{4}$$
ただし、$a = \alpha G(>)0$、$b = -(GN_0 - k)(>)0$ とする。明らかに、$f(n)$ は n について 2 次関数で、上に凸のグラフとなる。$f(0) = 0$ で、かつ、
$$f(n) < 0 \quad \text{for } n > 0 \tag{5}$$
は明らかである。従って、グラフは図 1 のように書けるはずである。

   $n > 0$ のとき $\dot{n} < 0$ なので、$n > 0$ で n は時間とともに減少する。そして、ある時刻で $n = 0$ になると $\dot{n} = 0$ となり、n の値は変化しなくなる。よって、$n = 0$ が安定な値となる。

3. $N_0 > k/G$ のとき、$GN_0 - k > 0$ となる。従って、式 (3) により、$\dot{n}$ は以下の関数 $g(n)$ で表される。
$$\begin{aligned} g(n) &= -an^2 + bn \\ &= -an(n - \frac{b}{a}) \end{aligned} \tag{6}$$
ただし、$a = \alpha G > 0$、$b = GN_0 - k(>)0$ とする。明らかに、$g(n)$ は n について 2 次関数で、上に凸のグラフとなる。$g(n) = 0$ となる n として、$n = 0$ と $n = b/a(> 0)$ が存在する。従って、グラフは図 2 のように書けるはずである。

   $0 < n < b/a$ で $g(n) > 0$ となる。すなわち、$0 < n < b/a$ で $\dot{n} > 0$ となり、この領域では n の値は時間とともに増加する。一方、$n > b/a$ では $g(n) < 0$ となる。従って、$n > b/a$ において $\dot{n} < 0$ となり、この領域では n の値は時間とともに減少する。これら二つの事実から、n は十分時間が経つと $n = b/a$ の値に落着き、それ以上変化しなくなる。よって、$n = b/a = (GN_0 - k)/(\alpha G)$ が安定な値である。

4. $0 \leq N_0 < k/G$ のとき、$n = 0$ が安定な値である。しかし、N_0 が増加して、$N_0 > k/G$ となると、$n = (GN_0 - k)/(\alpha G)$ が安定な値となる。この $(GN_0 - k)/(\alpha G)$ は、N_0 の 1 次関数で増加していく。よって、グラフは図 3 のようになる。

   従って、レーザー共振器内の光子の個数を 0 より大きくするには、$N_0 > k/G$ が成り立たなくてはならない。これが、レーザー発振の必要な条件に一つとなる。