



作成者：吾妻広夫

解答

1. まず、 ρ は次で与えられる。

$$\begin{aligned}\rho &= |0\rangle\langle 0| \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1}$$

よって、 ρ' は次で与えられる。

$$\begin{aligned}\rho' &= (1-p)\rho + pX\rho X \\ &= (1-p)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2}$$

忠実度は、以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}F(\rho', |0\rangle) &= \langle 0|\rho'|0\rangle \\ &= (1, 0)\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= p,\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}F(\rho', |1\rangle) &= \langle 1|\rho'|1\rangle \\ &= (0, 1)\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 1-p\end{aligned}\tag{4}$$

2. まず、 ρ は次で与えられる。

$$\begin{aligned}\rho &= |+\rangle\langle +| \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, 1) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{5}$$

よって、 ρ' は次で与えられる。

$$\begin{aligned}\rho' &= (1-p)\rho + pX\rho X \\ &= \frac{1}{2}(1-p)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}p\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{6}$$

忠実度は、以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} F(\rho', |+\rangle) &= \langle +|\rho'|+\rangle \\ &= \frac{1}{4}(1, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 1, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} F(\rho', |1\rangle) &= \langle -|\rho'|- \rangle \\ &= \frac{1}{4}(1, -1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$