

解答

1. まず、 ρ は次で与えられる。

$$\begin{aligned}
 \rho &= |+\rangle\langle +| \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, 1) \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{1}$$

よって、 ρ' は次で与えられる。

$$\begin{aligned}
 \rho' &= (1-p)\rho + pZ\rho Z \\
 &= \frac{1}{2}(1-p) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1-2p \\ 1-2p & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2}$$

忠実度は以下で与えられる。

$$\begin{aligned}
 F(\rho', |+\rangle) &= \langle +|\rho'|+\rangle \\
 &= \frac{1}{4}(1, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1-2p \\ 1-2p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= 1-p,
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 F(\rho', |-\rangle) &= \langle -|\rho'|-\rangle \\
 &= \frac{1}{4}(1, -1) \begin{pmatrix} 1 & 1-2p \\ 1-2p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 &= p
 \end{aligned} \tag{4}$$

2. まず、 ρ は次で与えられる。

$$\begin{aligned}
 \rho &= |0\rangle\langle 0| \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{5}$$

よって、 ρ' は次で与えられる。

$$\begin{aligned}
 \rho' &= (1-p)\rho + pZ\rho Z \\
 &= (1-p) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{6}$$

忠実度は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} F(\rho', |0\rangle) &= \langle 0|\rho'|0\rangle \\ &= (1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 1, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} F(\rho', |1\rangle) &= \langle 1|\rho'|1\rangle \\ &= (0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$