作成者：吾妻広夫

練習問題
測定演算子について考える。

1. 今、2次元正規直交基底 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ による観測を行おうとしているとする。ただし、

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

とする。

任意の 1-qubit 状態 $|\psi\rangle$ を観測して $|0\rangle$ を得る確率は、

$$P_0 = \langle\psi|0\rangle\langle 0|\psi\rangle \tag{2}$$

で与えられる。同様にして、$|\psi\rangle$ を観測して $|1\rangle$ を得る確率は、

$$P_1 = \langle\psi|1\rangle\langle 1|\psi\rangle \tag{3}$$

で与えられる。

観測によって $|0\rangle$ を見出した時は出力として $+1$ を得る、$|1\rangle$ を見出した時は出力として -1 を得る、とした場合、1-qubit 状態 $|\psi\rangle$ の出力の期待値は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} P_0 - P_1 &= \langle\psi|0\rangle\langle 0|\psi\rangle - \langle\psi|1\rangle\langle 1|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\Pi_Z|\psi\rangle \end{aligned} \tag{4}$$

ただし、

$$\Pi_Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \tag{5}$$

とする。

Π_Z は測定演算子と呼ばれる。Π_Z の 2×2 行列表示を求めよ。

2. 今度は、2次元正規直交基底 $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ による観測を行おうとしているとする。ただし、

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

とする。

任意の 1-qubit 状態 $|\psi\rangle$ を観測して $|+\rangle$ を得る確率は、

$$P_+ = \langle\psi|+\rangle\langle +|\psi\rangle \tag{7}$$

で与えられる。同様にして、$|\psi\rangle$ を観測して $|-\rangle$ を得る確率は、

$$P_- = \langle\psi|-\rangle\langle -|\psi\rangle \tag{8}$$

で与えられる。

観測によって $|+\rangle$ を見出した時は出力として $+1$ を得る、$|-\rangle$ を見出した時は出力として -1 を得る、とした場合、1-qubit 状態 $|\psi\rangle$ の出力の期待値は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} P_+ - P_- &= \langle\psi|+\rangle\langle +|\psi\rangle - \langle\psi|-\rangle\langle -|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\Pi_X|\psi\rangle \end{aligned} \tag{9}$$

ただし、

$$\Pi_X = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-| \tag{10}$$

とする。測定演算子 Π_X の 2×2 行列表示を求めよ。

3. 上記の問題を、以下のように一般化する。2 次元正規直交基底 $\{|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle\}$ による観測を行おうとしているとする。ただし、$\{|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle\}$ が 2 次元正規直交基底であるとは、$|\phi_0\rangle$、$|\phi_1\rangle$ のノルムが 1 で、$\langle\phi_0|\phi_1\rangle = 0$ ということとする。任意の 1-qubit 状態 $|\psi\rangle$ を観測して $|\phi_0\rangle$ を得る確率は、

$$P_{\phi 0} = \langle\psi|\phi_0\rangle\langle\phi_0|\psi\rangle \tag{11}$$

で与えられる。同様にして、$|\psi\rangle$ を観測して $|\phi_1\rangle$ を得る確率は、

$$P_{\phi 1} = \langle\psi|\phi_1\rangle\langle\phi_1|\psi\rangle \tag{12}$$

で与えられる。

観測によって $|\phi_0\rangle$ を見出した時は出力として $+1$ を得る、$|\phi_1\rangle$ を見出した時は出力として -1 を得る、とした場合、1-qubit 状態 $|\psi\rangle$ の出力の期待値は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} P_{\phi 0} - P_{\phi 1} &= \langle\psi|\phi_0\rangle\langle\phi_0|\psi\rangle - \langle\psi|\phi_1\rangle\langle\phi_1|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\Pi_\phi|\psi\rangle \end{aligned} \tag{13}$$

ただし、

$$\Pi_\phi = |\phi_0\rangle\langle\phi_0| - |\phi_1\rangle\langle\phi_1| \tag{14}$$

とする。

測定演算子である 2×2 行列 Π_ϕ は以下の性質を持つ。次の方程式を考える。

$$\Pi_\phi|\varphi_k\rangle = \lambda_k|\varphi_k\rangle \quad \text{for } k = 0, 1 \tag{15}$$

このとき、以下が成立することを確かめなさい。

$$\begin{aligned} \lambda_0 = 1, &\quad |\varphi_0\rangle = |\phi_0\rangle \\ \lambda_1 = -1, &\quad |\varphi_1\rangle = |\phi_1\rangle \end{aligned} \tag{16}$$

4. 上記の関係が成立するとき、λ_k、$|\varphi_k\rangle$ は、測定演算子 Π_ϕ の固有値、固有ベクトルであるという。固有値が ±1 であることが、測定演算子 Π_ϕ の持つ第一の特徴的な性質である。

第二の特徴的な性質は、次のようなものである。行列 Π_ϕ に対して、行と列の入れ替え操作である転置を行い、さらに、各成分を複素共役にして得られる行列を $\overline{\Pi_\phi^{\mathrm{T}}}$ とすると、

$$\overline{\Pi_\phi^{\mathrm{T}}} = \Pi_\phi \tag{17}$$

が成り立つ。($\overline{\Pi_\phi^{\mathrm{T}}}$ を $\Pi_\phi^\dagger$ と書くことがある。$\Pi_\phi^\dagger$ は Π_ϕ の adjoint(随伴)、あるいは、エルミート共役、あるいは、自己共役であるということがある。)

上記二つの特徴を持つ測定演算子は、測定値が ±1 の二値の射影測定を実行する際に利用される。

ここで、測定演算子の具体例として、以下の二つを考える。

$$\Pi_{Z-X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z-X), \quad \Pi_{Z+X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z+X) \tag{18}$$

ただし、

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

とする。

Π_{Z-X}、Π_{Z+X} の固有値が、確かに $+1$ と -1 であることを確かめなさい。さらに、$\overline{\Pi_{Z-X}}$、$\overline{\Pi_{Z+X}}$、Π^{T}_{Z-X}、Π^{T}_{Z+X} が、それぞれ Π_{Z-X}、Π_{Z+X} と等しいことを確かめなさい。

ただし、次の点に注意する。Π_{Z-X}、Π_{Z+X} の固有ベクトルを直接求めることは、計算が煩雑になるため避けた方が良い。そこで、固有値を求める方法として、次を使うのが得策である。

行列 A の固有値、固有ベクトルを λ、$|\varphi\rangle$ とする。以下の関係式が成立する。

$$A|\varphi\rangle = \lambda|\varphi\rangle \tag{20}$$

上式を次のように変形する。

$$(A-\lambda I)|\varphi\rangle = 0 \tag{21}$$

ただし、I は 2×2 の単位行列とする。これは、行列 $(A-\lambda I)$ が逆行列を持たないことを意味する。従って、行列 $(A-\lambda I)$ の行列式はゼロに等しくなくてはならない。行列 $(A-\lambda I)$ の行列式は λ は 2 次関数であり、従って、2 次方程式の解の公式を使って、必ず λ の値を求めることが可能である。