解答

作成者：吾妻広夫

1.

$$\begin{aligned}\Pi_Z &= |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1,0) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0,1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

2.

$$\begin{aligned}\Pi_X &= |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -| \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1,1) - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}(1,-1) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

3. 以下で示せたことになる。

$$\begin{aligned}\Pi_\phi|\phi_0\rangle &= (|\phi_0\rangle\langle\phi_0| - |\phi_1\rangle\langle\phi_1|)|\phi_0\rangle \\ &= |\phi_0\rangle\langle\phi_0|\phi_0\rangle - |\phi_1\rangle\langle\phi_1|\phi_0\rangle \\ &= |\phi_0\rangle, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\Pi_\phi|\phi_1\rangle &= (|\phi_0\rangle\langle\phi_0| - |\phi_1\rangle\langle\phi_1|)|\phi_1\rangle \\ &= |\phi_0\rangle\langle\phi_0|\phi_1\rangle - |\phi_1\rangle\langle\phi_1|\phi_1\rangle \\ &= -|\phi_1\rangle, \end{aligned} \tag{4}$$

4. 以下に Π_{Z-X}、Π_{Z+X} を具体的に 2×2 行列で書き下す。

$$\begin{aligned}\Pi_{Z-X} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(Z-X) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\Pi_{Z+X} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(Z+X) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

まず、Π_{Z-X} の固有値を求める。

$$\Pi_{Z-X} - \lambda I = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2}\lambda & -1 \\ -1 & -1-\sqrt{2}\lambda \end{pmatrix} \tag{7}$$

よって、行列式は以下のように書き下せる。

$$\begin{aligned}\det(\Pi_{Z-X} - \lambda I) &= \frac{1}{2}[(\sqrt{2}\lambda - 1)(\sqrt{2}\lambda + 1) - 1] \\ &= \lambda^2 - 1 \qquad (8)\end{aligned}$$

上の行列式がゼロであることにより、$\lambda = \pm 1$ を得る。

次に、Π_{Z+X} の固有値を求める。

$$\Pi_{Z+X} - \lambda I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2}\lambda & 1 \\ 1 & -1 - \sqrt{2}\lambda \end{pmatrix} \qquad (9)$$

よって、行列式は以下のように書き下せる。

$$\begin{aligned}\det(\Pi_{Z+X} - \lambda I) &= \frac{1}{2}[(\sqrt{2}\lambda - 1)(\sqrt{2}\lambda + 1) - 1] \\ &= \lambda^2 - 1 \qquad (10)\end{aligned}$$

上の行列式がゼロであることにより、$\lambda = \pm 1$ を得る。

$\overline{\Pi^{\mathrm{T}}_{Z-X}}$、$\overline{\Pi^{\mathrm{T}}_{Z+X}}$ が、それぞれ Π_{Z-X}、Π_{Z+X} と等しいことは、式 (5)、(6) より明らかである。