作成者：吾妻広夫

解答

1. $|\psi\rangle_{\mathrm{A_1}}$、$|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A_2B}}$ の表式を代入すれば以下は明らかである。

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{\mathrm{A_1}}|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A_2B}} &= (\alpha|0\rangle_{\mathrm{A_1}}+\beta|1\rangle_{\mathrm{A_1}})\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_{\mathrm{A_2}}|0\rangle_{\mathrm{B}}+|1\rangle_{\mathrm{A_2}}|1\rangle_{\mathrm{B}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle_{\mathrm{A_1}}|0\rangle_{\mathrm{A_2}}|0\rangle_{\mathrm{B}}+\alpha|0\rangle_{\mathrm{A_1}}|1\rangle_{\mathrm{A_2}}|1\rangle_{\mathrm{B}} \\ &\quad +\beta|1\rangle_{\mathrm{A_1}}|0\rangle_{\mathrm{A_2}}|0\rangle_{\mathrm{B}}+\beta|1\rangle_{\mathrm{A_1}}|1\rangle_{\mathrm{A_2}}|1\rangle_{\mathrm{B}}) \end{aligned} \tag{1}$$

2. $|00\rangle$ は以下のようにして求められる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle+|\Phi^-\rangle) &= \frac{1}{2}(|00\rangle+|11\rangle+|00\rangle-|11\rangle) \\ &= |00\rangle \end{aligned} \tag{2}$$

$|11\rangle$、$|01\rangle$、$|10\rangle$ についても同様である。

3.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{\mathrm{A_1}}|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A_2B}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle_{\mathrm{A_1}}|0\rangle_{\mathrm{A_2}}|0\rangle_{\mathrm{B}}+\alpha|0\rangle_{\mathrm{A_1}}|1\rangle_{\mathrm{A_2}}|1\rangle_{\mathrm{B}} \\ &\quad +\beta|1\rangle_{\mathrm{A_1}}|0\rangle_{\mathrm{A_2}}|0\rangle_{\mathrm{B}}+\beta|1\rangle_{\mathrm{A_1}}|1\rangle_{\mathrm{A_2}}|1\rangle_{\mathrm{B}}) \\ &= \frac{1}{2}\Big[\alpha(|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A_1A_2}}+|\Phi^-\rangle_{\mathrm{A_1A_2}})|0\rangle_{\mathrm{B}} \\ &\quad +\alpha(|\Psi^+\rangle_{\mathrm{A_1A_2}}+|\Psi^-\rangle_{\mathrm{A_1A_2}})|1\rangle_{\mathrm{B}} \\ &\quad +\beta(|\Psi^+\rangle_{\mathrm{A_1A_2}}-|\Psi^-\rangle_{\mathrm{A_1A_2}})|0\rangle_{\mathrm{B}} \\ &\quad +\beta(|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A_1A_2}}-|\Phi^-\rangle_{\mathrm{A_1A_2}})|1\rangle_{\mathrm{B}}\Big] \end{aligned} \tag{3}$$

4.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{\mathrm{A_1}}|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A_2B}} &= \frac{1}{2}\Big[\alpha(|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A_1A_2}}+|\Phi^-\rangle_{\mathrm{A_1A_2}})|0\rangle_{\mathrm{B}} \\ &\quad +\alpha(|\Psi^+\rangle_{\mathrm{A_1A_2}}+|\Psi^-\rangle_{\mathrm{A_1A_2}})|1\rangle_{\mathrm{B}} \\ &\quad +\beta(|\Psi^+\rangle_{\mathrm{A_1A_2}}-|\Psi^-\rangle_{\mathrm{A_1A_2}})|0\rangle_{\mathrm{B}} \\ &\quad +\beta(|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A_1A_2}}-|\Phi^-\rangle_{\mathrm{A_1A_2}})|1\rangle_{\mathrm{B}}\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A_1A_2}}(\alpha|0\rangle_{\mathrm{B}}+\beta|1\rangle_{\mathrm{B}}) \\ &\quad +|\Phi^-\rangle_{\mathrm{A_1A_2}}(\alpha|0\rangle_{\mathrm{B}}-\beta|1\rangle_{\mathrm{B}}) \\ &\quad +|\Psi^+\rangle_{\mathrm{A_1A_2}}(\alpha|1\rangle_{\mathrm{B}}+\beta|0\rangle_{\mathrm{B}}) \\ &\quad +|\Psi^-\rangle_{\mathrm{A_1A_2}}(\alpha|1\rangle_{\mathrm{B}}-\beta|0\rangle_{\mathrm{B}})\Big] \end{aligned} \tag{4}$$

5. 上の問題で求めた $|\psi\rangle_{\mathrm{A_1}}|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A_2B}}$ の表式を見ると、$|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A_1A_2}}(\alpha|0\rangle_{\mathrm{B}}+\beta|1\rangle_{\mathrm{B}})$ の係数は $1/2$ である。従って、$|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A_1A_2}}$ を得る確率は、$(1/2)^2=1/4$ となる。このとき、Bob の得る状態は、$\alpha|0\rangle_{\mathrm{B}}+\beta|1\rangle_{\mathrm{B}}$ である。

   同様にして、$|\Phi^-\rangle_{\mathrm{A_1A_2}}(\alpha|0\rangle_{\mathrm{B}}-\beta|1\rangle_{\mathrm{B}})$ の係数は $1/2$ である。従って、$|\Phi^-\rangle_{\mathrm{A_1A_2}}$ を得る確率は、$(1/2)^2=1/4$ となる。このとき、Bob の得る状態は、$\alpha|0\rangle_{\mathrm{B}}-\beta|1\rangle_{\mathrm{B}}$ である。

   また、$|\Psi^+\rangle_{\mathrm{A_1A_2}}(\alpha|1\rangle_{\mathrm{B}}+\beta|0\rangle_{\mathrm{B}})$ の係数は $1/2$ である。従って、$|\Psi^+\rangle_{\mathrm{A_1A_2}}$ を得る確率は、$(1/2)^2=1/4$ となる。このとき、Bob の得る状態は、$\alpha|1\rangle_{\mathrm{B}}+\beta|0\rangle_{\mathrm{B}}$ である。

   さらに、$|\Psi^-\rangle_{\mathrm{A_1A_2}}(\alpha|1\rangle_{\mathrm{B}}-\beta|0\rangle_{\mathrm{B}})$ の係数は $1/2$ である。従って、$|\Psi^-\rangle_{\mathrm{A_1A_2}}$ を得る確率は、$(1/2)^2=1/4$ となる。このとき、Bob の得る状態は、$\alpha|1\rangle_{\mathrm{B}}-\beta|0\rangle_{\mathrm{B}}$ である。