

## 練習問題

量子状態を複製する素子を考える。この素子は、任意の二つの状態  $|\psi\rangle$ 、 $|\phi\rangle$  に対して、以下のユニタリ演算子  $U$  を作用させるとする。

$$U|\psi\rangle_A|0\rangle_B = U|\psi\rangle_A|\psi\rangle_B, \quad (1)$$

$$U|\phi\rangle_A|0\rangle_B = U|\phi\rangle_A|\phi\rangle_B \quad (2)$$

式(1)を見ると、初期状態では、粒子Aが  $|\psi\rangle$ 、粒子Bが  $|0\rangle$  の状態にあったのが、ユニタリ演算子  $U$  を作用させた後では、粒子Aが  $|\psi\rangle$ 、粒子Bが  $|\psi\rangle$  の状態にあることとなる。これは、粒子Bに状態  $|\psi\rangle$  が複製されたと見なせる。

式(2)を見ると、初期状態では、粒子Aが  $|\phi\rangle$ 、粒子Bが  $|0\rangle$  の状態にあったのが、ユニタリ演算子  $U$  を作用させた後では、粒子Aが  $|\phi\rangle$ 、粒子Bが  $|\phi\rangle$  の状態にあることとなる。これは、粒子Bに状態  $|\phi\rangle$  が複製されたと見なせる。

1. 式(1)の左辺と、式(2)の左辺の内積、すなわち、

$${}_A\langle\psi|{}_B\langle 0|U^\dagger U|\phi\rangle_A|0\rangle_B \quad (3)$$

が、 $\langle\psi|\phi\rangle$  と等しいことを示しなさい。(  $U^\dagger U = I$  であることに注意して計算すると良い。) )

2. 式(1)の右辺と、式(2)の右辺の内積が、 $(\langle\psi|\phi\rangle)^2$  と等しいことを示しなさい。
3. 上の二つの問いの結果から、 $\langle\psi|\phi\rangle$  が0あるいは1であることを示しなさい。この結果から、ユニタリ演算子  $U$  を作用させる素子は、任意の状態を複製できないことを説明しなさい。